DANZER, L., u. B. GRÜNBAUM
Math. Zeitschr. 79, 95—99 (1962)

Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdös und von V. L. Klee

Von

L. DANZER und **B. GRÜNBAUM**

Einleitung

Etwa 1950 hat P. ERDÖS vermutet (s. auch [2] und [3]), daß man im euklidischen $\mathfrak{E}^n$ nicht mehr als 2^n Punkte so verteilen kann, daß jeder von ihnen gebildete Winkel kleiner oder gleich einem rechten ist. Das Problem wurde von der holländischen mathematischen Gesellschaft als Preisaufgabe gestellt (Wiskundig Genootschap, Prijsvragen 1951 und 1952). Die daraufhin eingegangenen Lösungen, sowie eine weitere von N. KUIPER (unveröffentlicht) erledigten jedoch nur die Fälle $n=2$ und $n=3$. — Kürzlich fragte V. L. KLEE [6], wie viele Punkte man so im affinen $\mathfrak{R}^n$ verteilen kann, daß je zwei von ihnen bezüglich der ganzen Menge *antipodisch* liegen (d.h., es soll zwei parallele Hyperebenen geben derart, daß der eine Punkt in der einen, der andere Punkt in der anderen und die ganze Menge zwischen beiden liegt). — Im folgenden wollen wir diese und einige verwandte Maximalzahlen des $\mathfrak{R}^n$ dadurch bestimmen, daß wir eine Ungleichungskette für sie ableiten, die mit 2^n beginnt und mit derselben Zahl endet.

Wir fühlen uns den Herren P. ERDÖS, H. FREUDENTHAL und V. L. KLEE, die uns auf die hier behandelten Probleme hingewiesen haben, sehr zu Dank verpflichtet.

Definitionen

Wir wollen Punktmengen $\mathfrak{M}$ mit folgenden Eigenschaften untersuchen:

$\varepsilon(n, \mathfrak{M})$ $\left\{\right.$ $\mathfrak{M}$ liegt im $\mathfrak{E}^n$, aber in keiner Hyperebene des $\mathfrak{E}^n$, und keine drei Punkte aus $\mathfrak{M}$ bilden ein stumpfwinkliges Dreieck;

und

$\varkappa(n, \mathfrak{M})$ $\left\{\right.$ $\mathfrak{M}$ liegt im $\mathfrak{R}^n$, aber in keiner Hyperebene des $\mathfrak{R}^n$, und zu je zwei verschiedenen Punkten A, B aus $\mathfrak{M}$ gibt es zwei verschiedene parallele Hyperebenen, von denen die eine $\mathfrak{M}$ in A und die andere $\mathfrak{M}$ in B stützt.

Die Konsequenzen dieser Eigenschaften lassen sich besser studieren, wenn man $\mathfrak{M}$ auffaßt als Menge von Vektoren $A, B, \ldots,$ um die ein geeigneter konvexer Körper $\mathfrak{C}$ [1]) verschoben wird. Man betrachtet also Familien

[1]) Eine Punktmenge heißt *konvexer Körper,* falls sie konvex und kompakt ist und innere Punkte besitzt.

$\mathscr{F}(\mathfrak{C},\mathfrak{M}) := [\mathfrak{C}_A \mid A \in \mathfrak{M}]$, wo $\mathfrak{C}_A$ zur Abkürzung für das Translat $\mathfrak{C}+A$ [2]) von $\mathfrak{C}$ steht. Uns interessieren hier die folgenden beiden Eigenschaften solcher Familien:

$$\mu(n,\mathfrak{C},\mathfrak{M}) \begin{cases} \mathfrak{C} \text{ ist ein konvexer Körper des } \mathfrak{R}^n,\ \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}^n, \text{ und je zwei Mitglieder} \\ \text{der Familie } \mathscr{F}(\mathfrak{C},\mathfrak{M}) \text{ berühren sich}^{3}); \end{cases}$$

und

$$\lambda(n,\mathfrak{C},\mathfrak{M}) \quad \{\mu(n,\mathfrak{C},\mathfrak{M}) \text{ und } \bigcap_{A\in\mathfrak{M}} \mathfrak{C}_A \neq \varnothing\}.$$

Unser Ziel ist, festzustellen aus wie vielen Punkten eine Menge $\mathfrak{M}$ höchstens bestehen kann, wenn sie eine der Eigenschaften $\varepsilon, \varkappa, \lambda, \mu$ besitzen soll. Wir definieren daher:

$$e_n := \sup\{\operatorname{card}(\mathfrak{M}) \mid \text{Es gilt } \varepsilon(n,\mathfrak{M})\},$$

$$k_n := \sup\{\operatorname{card}(\mathfrak{M}) \mid \text{Es gilt } \varkappa(n,\mathfrak{M})\},$$

$$l(\mathfrak{C}) := \sup\{\operatorname{card}(\mathfrak{M}) \mid \text{Es gilt } \lambda(n,\mathfrak{C},\mathfrak{M})\},$$

$$l_n := \sup\{l(\mathfrak{C}) \mid \mathfrak{C} \text{ ist ein konvexer Körper des } \mathfrak{R}^n\},$$

$$m(\mathfrak{C}) := \sup\{\operatorname{card}(\mathfrak{M}) \mid \text{Es gilt } \mu(n,\mathfrak{C},\mathfrak{M})\},$$

$$m_n := \sup\{m(\mathfrak{C}) \mid \mathfrak{C} \text{ ist ein konvexer Körper des } \mathfrak{R}^n\},$$

$$m_n^* := \sup\{m(\mathfrak{C}) \mid \mathfrak{C} \text{ ist ein konvexer Körper des } \mathfrak{R}^n, \text{ und es ist } \mathfrak{C} = -\mathfrak{C}\}\ ^{2}).$$

Sätze

I a) Aus $\varepsilon(n,\mathfrak{M})$ folgt $\varkappa(n,\mathfrak{M})$;

b) $\varkappa(n,-\mathfrak{M})$ ist äquivalent zu $\lambda(n,\operatorname{conv}(\mathfrak{M}),-\mathfrak{M})$ [4]);

c) $\mu(n,\mathfrak{C},\mathfrak{M})$ ist äquivalent zu $\mu(n,\tfrac{1}{2}((-\mathfrak{C})+\mathfrak{C}),\mathfrak{M})$ (Minkowski-Symmetrisierung).

II a) Es ist $e_n = k_n = l_n = m_n = m_n^* = 2^n$.

b α) Die einzigen Mengen $\mathfrak{C}$ mit $m(\mathfrak{C}) = 2^n$ sind die n-dimensionalen Parallelotope;

β) jede 2^n-punktige Menge $\mathfrak{M}$ mit $\varkappa(n,\mathfrak{M})$ besteht aus den Eckpunkten eines n-dimensionalen Parallelotops.

Bemerkung: Man kann sich fragen, wie sich die Situation ändert, wenn man in $\varepsilon(n,\mathfrak{M})$ statt nicht-stumpfer Winkel *spitze* Winkel verlangt (vgl. [3]).

[2]) Wir verwenden Pluszeichen zwischen Punkten bzw. Punktmengen für Vektor- bzw. Minkowski-Addition:

$$\mathfrak{C}+A := \{X \mid \exists\, C : C\in\mathfrak{C},\ X = C+A\};\quad \mathfrak{A}+\mathfrak{B} := \{X \mid \exists\, A, B : A\in\mathfrak{A},\ B\in\mathfrak{B},\ X = A+B\}.$$

$-\mathfrak{M}$ bezeichne das Spiegelbild von $\mathfrak{M}$ bezüglich des Ursprungs O.

[3]) Das heißt, sie sollen mindestens einen Randpunkt, aber keine inneren Punkte gemeinsam haben.

[4]) $\operatorname{conv}(\mathfrak{M})$ bezeichne die konvexe Hülle von $\mathfrak{M}$.

Man sieht leicht, daß die folgenden $2n-1$ Punkte

$$\left.\begin{array}{l} A_0 := \quad (1;0;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;0) \\ B_\nu := (-\delta_\nu;0;\ldots;0;+1;0;\ldots;0) \\ \qquad\qquad\quad \nearrow \\ \qquad\quad 1 \text{ in der } \nu\text{-ten Stelle} \\ \qquad\qquad\quad \searrow \\ C_\nu := (-\delta_\nu;0;\ldots;0;-1;0;\ldots;0) \end{array}\right\} \quad \nu = 2, 3, \ldots, n$$

nur spitze Winkel bilden, wenn man die Zahlen δ_ν sämtlich positiv, paarweise verschieden und sämtlich nicht größer als eins wählt. — Verschärft man die übrigen Bedingungen $\varkappa$, λ, μ in entsprechender Weise, indem man fordert, daß die betreffenden Stützhyperebenen in *genau* einem Punkt stützen, so gilt Satz I vollständig analog, während von Satz IIa immerhin die Ungleichungen (3) richtig bleiben. Wir wissen nicht, ob es Dimensionen n gibt, für die in der ersten von ihnen wirklich das Kleinerzeichen gilt.

Beweise

Zu I a): Zu gegebenen Punkten A, B aus $\mathfrak{M}$ betrachte man die Hyperebenen $\mathfrak{R}_A^{n-1}$ und $\mathfrak{R}_B^{n-1}$, welche orthogonal zur Geraden AB sind und A oder B enthalten. Aus $\varepsilon(n, \mathfrak{M})$ folgt nun, daß $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{R}_A^{n-1}$ und $\mathfrak{R}_B^{n-1}$ liegt.

Zu I b) „$\curvearrowright$“: In der eben verwendeten Bezeichnungsweise (und mit $\mathfrak{C} := \operatorname{conv}(\mathfrak{M})$) ist

$$\mathfrak{R}^{n-1} := \mathfrak{R}_A^{n-1} - A = \mathfrak{R}_B^{n-1} - B$$

eine gemeinsame Stützhyperebene von $\mathfrak{C}_{-A}$ und $\mathfrak{C}_{-B}$, welche diese beiden Mengen trennt. Andererseits

(1) ist wegen $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{C}$ $\quad O \in \mathfrak{C}_{-A}$ für *jeden* Punkt A aus $\mathfrak{M}$.

„$\curvearrowleft$“: Aus $\lambda(n, \mathfrak{C}, -\mathfrak{M})$ folgt die Existenz einer Hyperebene $\mathfrak{R}^{n-1}$, die $\mathfrak{C}_{-A}$ und $\mathfrak{C}_{-B}$ trennt. Wegen (1) ist $O \in \mathfrak{R}^{n-1}$; also sind $\mathfrak{R}^{n-1} + A$ und $\mathfrak{R}^{n-1} + B$ verschiedene Stützhyperebenen von $\mathfrak{C}$ und damit auch solche von $\mathfrak{M}$.

Zu I c): Dies war schon Minkowski bekannt ([*1*], s. auch [7] Hilfssatz 1). Der Beweis ergibt sich aus den beiden einfachen Tatsachen (die unabhängig von unserer Eigenschaft μ gelten):

$\mathfrak{C}_A \cap \mathfrak{C}_B \neq \emptyset \leftrightsquigarrow \exists X, Y : (X, Y \in \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad X - Y = A - B)$;

ein konvexer Körper $\mathfrak{C}$ und seine Minkowski-Symmetrisierung $\mathfrak{C}^* := \frac{1}{2}\big((-\mathfrak{C}) + \mathfrak{C}\big)$ haben denselben Differenzkörper, es ist also $(-\mathfrak{C}) + \mathfrak{C} = (-\mathfrak{C}^*) + \mathfrak{C}^*$.

$\mathfrak{C}_A$ berührt also $\mathfrak{C}_B$ genau dann, wenn $\mathfrak{C}_B^*$ von $\mathfrak{C}_A^*$ berührt wird.

Zu II a): Die Menge $\mathfrak{M}$ der Eckpunkte eines n-dimensionalen Quaders erfüllt $\varepsilon(n, \mathfrak{M})$; folglich ist

(2) $$2^n \leqq e_n.$$

Aus I a, b, der Implikation $\lambda(n, \mathfrak{C}, \mathfrak{M}) \curvearrowright \mu(n, \mathfrak{C}, \mathfrak{M})$ und I c folgt unmittelbar

$$e_n \leqq k_n = l_n \leqq m_n = m_n^*. \tag{3}$$

Betrachten wir also — um m_n^* abzuschätzen — eine Familie $\mathscr{F}(\mathfrak{C}, \mathfrak{M})$ mit $\mu(n, \mathfrak{C}, \mathfrak{M})$, wo $\mathfrak{C}$ ein konvexer Körper mit Mittelpunkt O sei.

(4) $\left\{\begin{array}{l}\text{Dann liegen für festes } A \text{ aus } \mathfrak{M} \text{ die Punkte} \\ \qquad \tfrac{1}{2}(A+B) \ (B \in \mathfrak{M}) \text{ sämtlich in } \mathfrak{C}_A;\end{array}\right.$

es ist nämlich A der Mittelpunkt von $\mathfrak{C}_A$ und B derjenige von $\mathfrak{C}_B$, und es sollte $\mathfrak{C}_A \cap \mathfrak{C}_B \neq \varnothing$ sein. Setzen wir $\mathfrak{D} := \operatorname{conv}(\mathfrak{M})$, so bedeutet (4) nichts anderes als (s. Figur 1)

(5) $\mathfrak{D}(A) := \tfrac{1}{2}(\mathfrak{D} + A) \subset \mathfrak{C}_A$ für jedes A aus $\mathfrak{M}$,

und hieraus folgt wegen $\mu(n, \mathfrak{C}, \mathfrak{M})$, daß

(6) je zwei Bereiche $\mathfrak{D}(A)$ und $\mathfrak{D}(B)$ sich berühren.

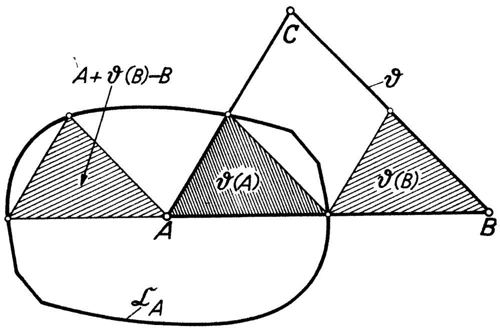

Fig. 1

Weil $\mathfrak{D}$ konvex ist, liegen die Mengen $\mathfrak{D}(A)$ sämtlich in $\mathfrak{D}$, woraus sich für die Volumina die Ungleichung

(7) $\left\{\begin{array}{l} m(\mathfrak{D}) \geqq \sum\limits_{A \in \mathfrak{M}} m(\mathfrak{D}(A)) \\ \qquad = (\tfrac{1}{2})^n\, m(\mathfrak{D}) \operatorname{card}(\mathfrak{M}) \end{array}\right.$

und schließlich $\operatorname{card}(\mathfrak{M}) \leqq 2^n$ oder

$$m_n^* \leqq 2^n \tag{8}$$

ergibt. Kombination von (2), (3) und (8) liefert II a.

Zu II bα): Auf Grund von I c und der Tatsache, daß ein konvexer Körper, der bei Zentralsymmetrisierung ein Parallelotop liefert, selbst ein solches ist (s. etwa [7] Hilfssatz 3; vgl. auch [8]), genügt es zu zeigen, daß kein anderer *zentralsymmetrischer* Körper $\mathfrak{C}$ die Gleichung $m(\mathfrak{C}) = 2^n$ erfüllt.

Wir haben es also mit dem Fall zu tun, daß in (7) Gleichheit besteht, Das bedeutet wegen (6), daß die Bereiche $\mathfrak{D}(A)$ $(A \in \mathfrak{M})$ eine *Zerlegung* von $\mathfrak{D}$ darstellen. Nach GROEMER ([7] Hilfssatz 2) ist ein konvexer Körper, der sich in endlich viele zu ihm positiv homothetische Bereiche zerlegen läßt, ein Parallelotop. Die aus (5) folgende Beziehung (s. Figur 1)

$$\mathfrak{C}_A \supset \bigcup_{B \in \mathfrak{M}} (A + \mathfrak{D}(B) - B)$$

verschärft sich damit zu einer Gleichheit (wobei sich überdies $\mathfrak{C}_A$ als Translat von $\mathfrak{D}$ herausstellt).

Zu II bβ): Wegen I b kommen hier keine anderen Mengen für $\mathfrak{M}$ in Betracht, als soeben unter α). Dort aber war $\mathfrak{M}$ die Menge der Eckpunkte des Parallelotops $\mathfrak{D}$, w.z.b.w.

Ein verwandtes Problem

Bei unseren Versuchen, die Zahlen m_n^* zu bestimmen, stießen wir auf die folgende Aufgabe: Gegeben sei eine natürliche Zahl k. Man betrachte alle k-punktigen Mengen $\mathfrak{M}$ in der affinen *Ebene* mit der Eigenschaft:

(9) Sind A, B, C, D aus $\mathfrak{M}$ und ist $AB \| CD$, so ist $|AB| = |CD|$.

Wie viele Punkte enthält unter dieser Bedingung die Differenzmenge $\mathfrak{M}^\circ := (-\mathfrak{M}) + \mathfrak{M}$ mindestens? Diese Anzahl ist eine streng monoton wachsende Funktion f von k, und es gilt trivialerweise

$$f(2^n) \leqq 3^n \quad \text{(geeignete Projektion eines } n\text{-dimensionalen Würfels)},$$

sowie

$$f(k\,l) \leqq f(k)\,f(l) \quad \text{(Minkowski-Addition)}.$$

Für $n \geqq 4$ konnten wir nicht entscheiden, ob $f(2^n) = 3^n$ gilt.

Schwächt man (9) ab, indem man lediglich fordert, es sollen keine drei Punkte kollinear sein, so erhält man anstelle von f eine Funktion g mit $g(2^n) < 3^n$ jedenfalls für $n \geqq 39$.

Literatur

[1] Minkowski, H.: Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **1904**, 311—355 (= Ges. Abh. Bd. 2, S. 3—42). Leipzig u. Berlin 1911.

[2] Erdös, P.: Problem 4306. Amer. Math. Monthly **55**, 431 (1948).

[3] Erdös, P.: Some unsolved problems. Michigan Math. J. **4**, 291—300 (1957).

[4] Hadwiger, H.: Über Treffanzahlen bei translationsgleichen Eikörpern. Archiv Math. **8**, 212—213 (1957).

[5] Halberg jr., C. J. A., E. Levin and E. G. Straus: On contiguous congruent sets in Euclidean space. Proc. Amer. Math. Soc. **10**, 335—344 (1959).

[6] Klee, V. L.: Unsolved problems in intuitive geometry. (Hektographiert, Seattle 1960.)

[7] Groemer, H.: Abschätzungen für die Anzahl der konvexen Körper, die einen konvexen Körper berühren. Monatsh. f. Math. **65**, 74—81 (1961).

[8] Grünbaum, B.: On a conjecture of H. Hadwiger. Pacific J. Math. **11**, 215—219 (1961).

[9] Erdös, P.: On some problems in geometry. Math. Lapok **8**, 81—92 (1957).

[10] Erdös, P., and G. Szekeres: On some extremum problems in elementary geometry. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös, Sect. Math. **3**, 53—62 (1960).

Dept. of Math., University of Washington, Seattle 5—Wash./USA

(Eingegangen am 13. Juni 1961)