

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK

DRESDNER SCHRIFTEN ZUR
MATHEMATISCHEN STOCHASTIK

4/2001

**Ausgewählte Beiträge des Workshops
"Stochastische Modelle und ihre Anwendungen"**

zusammengestellt von D. Ferger und J. Franz

Herausgeber: Die Professoren des Instituts für Mathematische Stochastik

ISSN 0946-4735

Vorwort

Die Erforschung stochastischer Modelle und ihrer Anwendungsmöglichkeiten in Technik, Wirtschaft und Naturwissenschaften hat in den vergangenen Jahrzehnten immer mehr an Bedeutung gewonnen. Viele Phänomene in Wissenschaft und Praxis können mit Hilfe stochastischer Methoden beschrieben und untersucht werden. So werden beispielsweise zur Bewertung der Qualität und Sicherheit technischer Geräte und Systeme Modelle der Zuverlässigkeitstheorie und der Statistischen Qualitätskontrolle eingesetzt. Immer wieder verbessern neue Erkenntnisse die Qualität der Aussagen. Weltweit erscheint jedes Jahr eine wachsende Anzahl von Publikationen auf den Gebieten der Angewandten Stochastik, und wichtige Tagungen und Konferenzen bereichern das wissenschaftliche Leben.

Im Rahmen der Fachgruppe Stochastik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung besteht eine Arbeitsgemeinschaft "Stochastische Modelle für Zuverlässigkeit, Qualität und Sicherheit (e.V.)", in der Mathematiker aus Universitäten und Hochschulen sowie aus Bereichen der Praxis mitarbeiten und im Abstand von zwei Jahren in Workshops über neueste Untersuchungen und Forschungsergebnisse diskutieren. In Fortsetzung der Reihe von Workshops: Mägdesprung/ Harz 1992, Weißig/ Sächsische Schweiz 1994, Schierke/ Harz 1997 und Kriebstein/ Mittweida 1999

fand vom 19. bis 22. März 2001 in Weißig (Sächsische Schweiz) der Workshop
Stochastische Modelle und ihre Anwendungen
mit ca. 30 Teilnehmern statt. Themen der Tagung waren

- * Zuverlässigkeits- und Instandhaltungsprobleme
- * Qualitätskontrolle und Qualitätssicherung
- * stochastische Modelle und Statistik in weiteren Anwendungen.

Ein wichtiges Anliegen des Zusammentreffens bestand auch darin, einen Beitrag zu liefern, dem erkennbaren Trend, dass sich "Anwender" und "Theoretiker" voneinander entfernen, entgegenzuwirken. Demzufolge wurden statistische Probleme bei großen Datenmengen vorgestellt und Lösungsansätze gesucht. Andererseits wurde über moderne Entwicklungen der angewandten Stochastik diskutiert und neue Forschungsergebnisse vorgetragen. Eine ausgewählte Anzahl von Beiträgen des Workshops wird in diesem Heft in Form von Extended Abstracts vorgestellt.

Für die gewissenhafte und sorgfältige Zusammenstellung dieses Tagungsheftes gilt unser besonderer Dank Frau Dipl.-Math. Christiane Weber.

Dresden, September 2001

D. Ferger, J. Franz

Dietmar Ferger

TU Dresden

A functional law of the iterated logarithm for U -statistic type processes

Abstract. We prove a functional law of the iterated logarithm for U -statistics type processes. The result is used to determine the almost sure set of limit points for change-point estimators.

Key words and phrases. Strassen type invariance principle, U -statistic process, cluster points, change-point estimator.

1. The functional law of the iterated logarithm

Let X_1, X_2, \dots be independent random variables defined on a probability space (Ω, \mathcal{A}, P) with values in a measurable space $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ and with a common distribution ν . The main object of this short note is the following U -statistic type process which up to a scaling factor has been introduced by Csörgő and Horváth (1988): Γ_n is the continuous random polygonal line with vertices at the points (kn^{-1}, Γ_{nk}) , $0 \leq k \leq n$, where

$$\Gamma_{nk} = (2\sigma^2 \log \log n)^{-1/2} n^{-1} \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^k K(X_i, X_j) .$$

Here, $K : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ -measurable and antisymmetric mapping, that is $K(x, y) = -K(y, x)$ for all $x, y \in \mathcal{X}$. Furthermore,

$$\sigma^2 := \int \left[\int K(x, y) \nu(dx) \right]^2 \nu(dy)$$

is assumed to be a positive and finite real number. Thus Γ_n is a random element in the space $C = C[0, 1]$ of all continuous functions on the unit interval endowed with the usual sup-metric and the induced Borel σ -algebra. In the following theorem we state a Strassen type invariance principle for the sequence $(\Gamma_n) \subseteq C[0, 1]$.

Theorem 1. Assume that

$$\int |K|^r d\nu \otimes \nu < \infty \quad \text{for some } r > 2 \quad (1.1)$$

and

$$\sigma^2 > 0 . \quad (1.2)$$

Then the sequence (Γ_n) is almost surely (a.s.) relatively compact with limit set

$$L_0 = \left\{ h \in C : \begin{array}{l} h \text{ is absolutely continuous on } [0, 1] \\ \text{with } h(0) = h(1) = 0 \text{ and} \\ \int_0^1 (h'(t))^2 dt \leq 1 \end{array} \right\}$$

or in short:

$$\Gamma_n \rightsquigarrow L_0 \quad a.s. \quad (1.3)$$

The set L_0 is known as Finkelstein's (1971) class.

Proof. Let us introduce the stochastic processes $\widehat{\Gamma}_n$ and Γ_n^* which are the continuous polygonal lines through the points $(kn^{-1}, \widehat{\Gamma}_{nk})$ resp. (kn^{-1}, Γ_{nk}^*) , $0 \leq k \leq n$, where

$$\widehat{\Gamma}_{nk} = (2\sigma^2 n \log \log n)^{-1/2} \left\{ \sum_{i=1}^k R(X_i) - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n R(X_i) \right\}$$

and

$$\Gamma_{nk}^* = (2\sigma^2 n \log \log n)^{-1/2} \sum_{i=1}^k R(X_i)$$

with

$$R(y) = \int K(x, y) \nu(dx) , \quad y \in \mathcal{X} .$$

Define a mapping $\phi : C \rightarrow C$ by

$$\phi(f)(t) = f(t) - tf(1) , \quad f \in C .$$

Elementary calculus shows that

$$\widehat{\Gamma}_n = \phi(\Gamma_n^*) .$$

By Strassen's (1964) invariance principle

$$\Gamma_n^* \rightsquigarrow L \quad a.s. ,$$

where

$$L = \{f \in C : f \text{ absolutely continuous on } [0, 1] \\ \text{with } f(0) = 1 \text{ and } \int_0^1 (f'(t))^2 dt \leq 1\} .$$

Since $\phi : C \rightarrow C$ is continuous the „Continuous Mapping Theorem for \rightsquigarrow ” (confer, e.g., Lemma (137) in Freedman (1983)) yields

$$\widehat{\Gamma}_n = \phi(\Gamma_n^*) \rightsquigarrow \phi(L) = L_0 \quad a.s. , \quad (1.4)$$

where the second equality in (1.4) is stated in Lemma A.1 of the appendix. Finally, put

$$H(x, y) = K(x, y) - R(y) + R(x) , \quad x, y \in \mathcal{X} .$$

Then for all $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & P \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\Gamma_n(t) - \widehat{\Gamma}_n(t)| > \varepsilon \right) \\ &= P \left(\max_{1 \leq k \leq n} |\Gamma_{nk} - \widehat{\Gamma}_{nk}| > \varepsilon \right) \\ &= P \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^k H(X_i, X_j) \right| > \varepsilon n^{3/2} (2\sigma^2 \log \log n)^{1/2} \right) \\ &\leq C \varepsilon^{-r} n^{-r/2} (\log \log n)^{-r/2} \end{aligned}$$

for some finite constant C by the maximal inequality in Lemma 3.1 of Ferger (1994). Consequently by the 1. Borel-Cantelli Lemma

$$\Gamma_n - \widehat{\Gamma}_n \rightarrow 0 \quad a.s. ,$$

which yields (1.3) upon noticing (1.4). □

2. An application in statistics

Consider a sequence of independent random variables X_1, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}$ with an unknown moment $m_n \in \{0, \dots, n\}$ of a change in the underlying distribution $\mathcal{L}(X_i) = P \circ X_i^{-1}$ of the X_i , i.e.

$$\mathcal{L}(X_i) = \begin{cases} \nu_1 & , \text{ if } 1 \leq i \leq m_n \\ \nu_2 & , \text{ if } m_n < i \leq n \end{cases} ,$$

where $\nu_1 \neq \nu_2$ are unknown probability measures on $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. Note that the extreme case $m_n \in \{0, n\}$ means that X_1, \dots, X_n are i.i.d. or in other words, there has no change (from ν_1 to ν_2) taken place. Ferger and Stute (1992) introduced the following statistic as an estimator for the moment m_n of change:

$$\widehat{m}_n = \operatorname{argmax}_{0 \leq k \leq n} \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^k K(X_i, X_j) ,$$

where by convention $\operatorname{argmax} f(t)$ denotes the smallest maximizer of a function $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, $T \subseteq \mathbb{R}$, with existing $\max_{t \in T} f(t)$. Under the assumption

$$m_n = [n\theta] \quad \text{for some } \theta \in (0, 1) \text{ ,} \quad (2.1)$$

where $[\cdot]$ denotes the integer part, Ferger (2001b) proved that

$$\widehat{m}_n - m_n = O_P(1) \text{ .}$$

Condition (2.1) ensures that for all $n \geq \theta^{-1}$ the sequence X_1, \dots, X_n features an actual moment of change. Of course there is a legitimate interest on the asymptotic behavior of (\widehat{m}_n) if in reality no change has occurred. Formally this corresponds to the limit case $\theta \in \{0, 1\}$ in (2.1). Here comes our result. It rather concerns the ratio

$$\widehat{\theta}_n = \frac{\widehat{m}_n}{n}$$

indicating the estimated fraction of the ν_1 -data within the whole sample.

Theorem 2. Assume that X_1, X_2, \dots are i.i.d. with $\mathcal{L}(X_1) = \nu$. If (1.1) and (1.2) are valid, then

$$\widehat{\theta}_n \rightsquigarrow [0, 1] \quad \text{a.s.} \quad (2.2)$$

Proof. Define the mapping $\psi : C \rightarrow [0, 1]$ by

$$\psi(f) = \operatorname{argmax}_{0 \leq t \leq 1} f(t) \text{ ,} \quad f \in C \text{ .}$$

So $\psi(f)$ denotes the smallest maximizing point of the continuous function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Such a point always exists by continuity of f and compactness of $[0, 1]$. This makes ψ a well-defined mapping. It is continuous on the subset

$$C_u = \{f \in C : f \text{ has a unique maximizer}\} \text{ ,}$$

confer, e.g., Lemma 6.1 of Ferger (2001a). Our definitions admitt the representation

$$\widehat{\theta}_n = \psi(\Gamma_n) \quad (2.3)$$

taking into account the simple property

$$\psi(\alpha f) = \psi(f) \quad \forall f \in C \quad \forall \alpha > 0 \text{ .}$$

From (2.3) and Theorem 1 one can easily infer that

$$\psi(L_0 \cap C_u) \subseteq H \quad \text{a.s. ,}$$

where H denotes the random set of limit points of the sequence $(\widehat{\theta}_n)$. On the other hand by Lemma A.2 in the appndix

$$(0, 1) \subseteq \psi(L_0 \cap C_u) \text{ ,}$$

whence

$$(0, 1) \subseteq H \subseteq [0, 1] \quad a.s. .$$

Let \bar{A} denote the topological closure of a set $A \subseteq \mathbb{R}$. Recall that $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ whenever $A \subseteq B$. Since H is closed (as a set of limit points) we therefore can conclude that

$$[0, 1] = \overline{(0, 1)} \subseteq \bar{H} = H \subseteq [0, 1] \quad a.s. ,$$

which finishes the proof, because H is actually compact. \square

Remark. Let $\{X_{in}, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ be a triangular array, where each n -th row X_{1n}, \dots, X_{nn} consists of i.i.d. \mathcal{X} -valued random variables. For Γ_n pertaining to the n -th row of an array instead of the first n random variables of a **sequence** Ferger (2001a) proved (2.2). However a crucial assumption there is the pairwise independence of the rows of the array. Therefore the special array $X_{in} = X_i, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$, is excluded and Theorem 2 is **not** simply a special case of Ferger's (2001a) result as stated in Theorem 4.2 there.

Appendix: Auxiliary lemmas

To make our proofs complete we have to fill two small gaps. The following two lemmas exactly answer this purpose.

Lemma A.1. $\phi(L) = L_0$

Proof. Let $g \in \phi(L)$ be arbitrary. Then $g(t) = f(t) - tf(1), 0 \leq t \leq 1$, for some $f \in L$, so that $g(0) = 0 = g(1)$ and $g'(t) = f'(t) - f(1)$. The latter equation implies that

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g'(t))^2 dt &= \int_0^1 (f'(t))^2 dt - 2f(1) \int_0^1 f'(t) dt + f^2(1) \\ &= \int_0^1 (f'(t))^2 dt - f^2(1) \leq \int_0^1 (f'(t))^2 dt \leq 1 , \end{aligned}$$

because $\int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0) = f(1)$ using $f \in L$, which also ensures the second inequality. Consequently $g \in L_0$, which proves $\phi(L) \subseteq L_0$. To see the reverse inclusion simply note that every $g \in L_0$ is a fix-point of the mapping ϕ . \square

Lemma A.2. $(0, 1) \subseteq \phi(L_0 \cap C_u)$

Proof. Take any point $\tau \in (0, 1)$. Define $g \in C$ by

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\tau} t & , \text{ if } 0 \leq t \leq \tau \\ \alpha - \frac{\alpha}{1-\tau}(t - \tau) & , \text{ if } \tau < t \leq 1 \end{cases} ,$$

where $\alpha = (\tau(1 - \tau))^{1/2}$ is positive. Obviously, g is absolutely continuous with $g(0) = g(1) = 0$ and $\phi(g) = \tau$. Since

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g'(t))^2 dt &= \int_0^\tau \left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^2 dt + \int_\tau^1 \left(\frac{\alpha}{1-\tau}\right)^2 dt \\ &= \frac{\alpha^2}{\tau} + \frac{\alpha^2}{1-\tau} = 1 \quad , \end{aligned}$$

it follows that $g \in L_0 \cap C_u$, which gives the desired result $\tau = \phi(g) \in \phi(L_0 \cap C_u)$. □

References

- Csörgő, M. and L. Horváth** (1988). Invariance principles for change-point problems. *J. Multivariate Anal.*, 27, 151-168.
- Ferger, D.** (1994). On exact rates of convergence in functional limit theorems for U -statistics type processes. *J. Theoret. Probab.*, 7, 709 - 723
- Ferger, D.** (2001a). Analysis of change-point estimators under the null hypothesis. *Bernoulli*, 7, 487 - 506.
- Ferger, D.** (2001b). Exponential and polynomial tailbounds for change-point estimators. *J. Statist. Plann. Inference*, 92, 73 - 109.
- Ferger, D. and W. Stute** (1992). Convergence of change-point estimators. *Stochastic process. Appl.*, 42, 345 - 351
- Finkelstein, H.** (1971). The law of the iterated logarithm for empirical distributions. *Ann. Math. Statist.*, 42, 607 - 615.
- Freedman, D.** (1983). *Brownian motion and diffusion*. Springer, New-York.
- Strassen, V.** (1964). An invariance principle für the law of the iterated logarithm. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 3, 211 - 226.

Dietmar Ferger
Dresden University of Technology
Department of Mathematics
D-01062 Dresden
Germany

Jürgen Franz

TU Dresden

Stress Modeling in Repairable Systems

Introduction

Stress models are closely connected with accelerated life testing for technical systems. It is often difficult to conduct life tests under normal operating conditions. So, accelerated life testing is a common method for assessing the reliability of systems. In an accelerated life testing experiment, test items are subjected to a stress at a level in excess of those that they typically encounter during their normal life. The items then wear or fail, and, in principle, the experimenter is able to assess their ability to withstand the stress, sooner and more economically than would be possible under ordinary stress conditions.

Now the relationship between mean lifetime ϑ and stress variables S is used. The variable S could be temperature, voltage, pressure, vibration, cycling rate etc. From literature we know some models like

$$\vartheta = d_0 S^{-d_1} \quad (d_0 > 0, d_1 > 0) \dots \text{power-rule model (S tension or voltage),}$$

$$\vartheta = \exp[-d_0 + d_1 S^{-1}] \quad (d_0 \in \mathbf{R}^1, d_1 > 0) \dots \text{Arrhenius model (S temperature),}$$

$$\vartheta = S \exp[-d_0 + d_1 S^{-1}] \quad (d_0 \in \mathbf{R}^1, d_1 > 0) \dots \text{Eyring model (S temperature or voltage).}$$

A more general stress model could be

$$\vartheta = \vartheta(\underline{S}) = \exp \left[d_0 + d_1 \ln S_1 + d_2 S_1^{-1} + d_3 S_2 + \frac{S_2}{S_1} \right]$$

where $\underline{S} = (S_1, S_2)$, and S_1 means temperature and S_2 a nonthermal variable.

Let us consider an example. Assume that the lifetime is Weibull distributed with density respectively failure rate

$$f_T(t) = \frac{b}{a^b} t^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right) \quad (t \geq 0; a > 0, b > 0),$$

$$\lambda_T(t) = \frac{b}{a^b} t^{b-1}.$$

Now, applying the Arrhenius stress model for the expected value $\vartheta = \mathbf{E}T = a\Gamma(1 + 1/b)$ we obtain

$$\lambda_T(t) = \exp(\alpha_0 + \alpha_1 S^{-1}) \beta t^{\beta-1} \quad (\beta = b, \alpha_0 = b(d_0 + \ln \Gamma(1 + 1/b)), \alpha_1 = -bd_1).$$

Now, let us turn to repairable systems. Here we have items which get repair actions after failures. The repairs can be minimal repairs, partial repairs or perfect repairs (the latter ones correspond to renewals). Certain repair actions (of negligible length) are immediately carried out after failures. The repaired items continue the operation. We assume that the operating time between two failures is influenced by stress quantities, and we apply stress models. Suppose that system failures (or inspection break-downs) occur at discrete time points τ_n ($n \in \mathbf{N}$). Additional information is observed at those time points: stress levels (for instance increased temperature), censoring indicators degrees of repair, damage values etc.

The Model

The failure-repair process is described by a marked point processes $(\tau_n, \xi_n)_{n \geq 1}$ on a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) where $\tau_n \in \mathbf{R}^+$ are time points of occurrence of events and $\xi_n \in \mathcal{X} \subset \mathbf{R}^d$ are marks (additional information about events). Suppose that $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbf{R}^k$, and θ is the (unknown) process parameter. Moreover we need the filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ in \mathcal{F} generated by $(\tau_n, \xi_n)_{n \geq 1}$ ($\{\tau_n \leq t, \xi_n \in A\} \in \mathcal{F}_t$). The counting process associated to (τ_n, ξ_n) , $\{N(t, A), t \geq 0\}$, $A \subset \mathcal{X}$, is introduced by

$$N(t, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\{\tau_n \leq t\} \mathbf{1}\{\xi_n \in A\}.$$

Let exist the intensity $\lambda(t, A)$ corresponding to $N(t, A)$ such that $\lambda(t, A) = \int_A \lambda(t, dx)$ and $\Lambda(t, A) = \int_0^t \lambda(u, A) du < \infty$ (P - a.s.). We set $\lambda(t) = \lambda(t, \mathcal{X})$, $\Lambda(t) = \Lambda(t, \mathcal{X})$, $N(t) = N(t, \mathcal{X})$.

Let us use the assumptions:

(A1) ξ_n conditionally independent given τ_n ($n = 1, 2, \dots$),

(A2) $P_{\theta, t} \ll P_t^*$ (restricted measures with respect to \mathcal{F}_t).

It follows that (cf. Luhm & Pruscha 1997)

$$\begin{aligned} \lambda(t, dx) &= h(t, x) \lambda^*(t, dx), \\ h(t, x) &= g(t, x) \lambda(t). \end{aligned}$$

Now, we choose particularly: $\xi_n = (\sigma_n, \delta_n)$ with $\sigma_n \in \{S_1, \dots, S_m\}$ (adjusted stress values) and $\delta_n \in \{0, 1\}$ (censoring indicators).

Then it holds: $\lambda(t) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(t)$ and $\lambda_{ij}(t) = p_{ij}(t) \lambda(t)$ ($= h(t, x)$) where $p_{ij}(t) = P(\sigma_n = S_i, \delta_n = j | \tau_n = t)$ ($i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{0, 1\}$). Moreover we set $N_{ij}(t) = N(t, \{S_i\} \times \{j\})$. Under certain regularity conditions the likelihood function of $\{N(t), t \geq 0\}$ exists (cf. Last & Brandt 1995):

$$L(t; \theta) = C(t) \exp \left\{ \int_0^t \int_{\mathbf{X}} \log(h(u, x; \theta)) N(du, dx) - \Lambda(t; \theta) \right\}$$

where $C(t)$ is a factor independent of θ .

The results of the paper base on the essential assumption

(A3): form of intensities:

$$\begin{aligned}\lambda_{i0}(t) &= \lambda_{i0}(t, \theta_0) = q_i(t) \exp(\eta_i) Y_0(t, \beta_0) \quad (\beta_0 > 0) \\ \lambda_{i1}(t) &= \lambda_{i1}(t, \theta_1) = \exp(\gamma) Y_1(t, \beta_1) \quad (\gamma > 0, \beta_1 > 0)\end{aligned}$$

with stress dependence:

$$\begin{aligned}\eta_i &= \alpha_0 + \alpha_1 X_1(S_i) + \dots + \alpha_l X_l(S_i) \quad (\alpha_0, \dots, \alpha_l \in \mathbf{R}^+) \\ \theta &= (\theta_0, \theta_1) = (\alpha_0, \dots, \alpha_l, \beta_0, \beta_1, \gamma).\end{aligned}$$

As examples, the assumptions (A1) - (A3) are fulfilled for nonhomogeneous Poisson processes $\{N(t), t \geq 0\}$ where especially (cf. Franz 1994)

$$\begin{aligned}Y(t, \beta) &= \beta t^{\beta-1} \quad \dots \text{Weibull process,} \\ Y(t, \beta) &= \beta \exp[\beta t] \quad \dots \text{log-linear process,} \\ Y(t, \beta) &= \beta (1 + \beta t)^{-1} \quad \dots \text{Pareto process.}\end{aligned}$$

A well-known stress model is the Arrhenius one where we have $\eta_i = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{S_i}$ (stress level S_i).

Parameter Estimation. Characterization of the Model

We focus our consideration to the case of Weibull process $\{N(t), t \geq 0\}$ and Arrhenius stress model, i.e. in (A3):

$$Y_j(t, \beta_j) = \beta_j t^{\beta_j-1} \quad \eta_i = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{S_i} =: \alpha_0 + \alpha_1 X_i \quad (j = 1, 2; \quad i = 1, \dots, m).$$

Let the conditional distribution of (σ_n, δ_n) be completely known and $q_i(t) = q_i$. Then the likelihood function has the form

$$\begin{aligned}L(t, \theta) &= C(t) \exp \left\{ (\alpha_0 + \ln \beta_0) N_0(t) + (\gamma + \ln \beta_1) N_1(t) + \right. \\ &\quad \left. \alpha_1 Z(t) + (\beta_0 - 1) M_0(t) + (\beta_1 - 1) M_1(t) - \right. \\ &\quad \left. e^{\alpha_0} \sum_{i=1}^k e^{\alpha_1 X_i} q_i T_0(t, \beta_0) - e^{\gamma} T_1(t, \beta_1) \right\} \quad (1)\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}Z(t) &= \sum_{i=1}^k X_i N_{i0}(t), \quad X_i := X_1(S_i), \\ N_j(t) &= \sum_{i=1}^k N_{ij}(t), \quad N(t) = N_0(t) + N_1(t), \\ T_j(t, \beta_j) &= t^{\beta_j}, \quad M_j(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \ln \tau_n \mathbf{1}\{\delta_n = j\} \quad (j = 1, 2), \\ T_0(t, \alpha_1, \beta_0) &= \sum_{i=1}^k e^{\alpha_1 X_i} q_i T_0(t, \beta_0).\end{aligned}$$

For the maximum likelihood parameter estimators, it immediately follows:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_0(t) &= \log \left[\frac{N_0(t)}{T_0^+(t, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_0)} \right], & \widehat{\gamma}(t) &= \log \left[\frac{N_1(t)}{T_1(t, \widehat{\beta}_1)} \right], \\ \widehat{\beta}_0(t) &= \frac{N_0(t)}{N_0(t) \log t - M_0(t)}, & \widehat{\beta}_1(t) &= \frac{N_1(t)}{N_1(t) \log t - M_1(t)}, \\ \widehat{\alpha}_1(t) : & \text{from } \frac{Z(t)}{N_0(t)} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i e^{\alpha_1 X_i} q_i}{\sum_{i=1}^k e^{\alpha_1 X_i} q_i}\end{aligned}$$

Under regularity conditions the m.l. estimators are asymptotically normal.

We remark that in the general case, when the counting process is not a Weibull one, the system of (nonlinear) m.l. equations is generally solved only by numerical methods.

Now, let us turn to failure time distributions. The stochastic behaviour of technical systems is essentially described by the time points τ_n and the sojourn times $T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

The conditional sojourn time distribution of T_n is given by (cf. Franz 1999)

$$\begin{aligned}P(T_n > u | \tau_{n-1} = s) &= \exp \left\{ -A[(u+s)^{\beta_0} - s^{\beta_0}] - e^\gamma [(u+s)^{\beta_1} - s^{\beta_1}] \right\}, \\ A &:= e^{\alpha_0} \sum_{i=1}^k e^{\alpha_1 X_i} q_i\end{aligned}$$

The density of the failure time τ_n is

$$\begin{aligned}f_{\tau_n}(t) &= \frac{A\beta_0 t^{\beta_0-1} + e^\gamma \beta_1 t^{\beta_1-1}}{(n-1)!} [At^{\beta_0} + e^\gamma t^{\beta_1}]^{n-1} \\ &\quad \times \exp[-At^{\beta_0} - e^\gamma t^{\beta_1}]\end{aligned}$$

Model Extensions and Special Problems

First we modify the model by use of more general counting processes. Consider the extended marks $\xi_n = (\sigma_n, \delta_n, \rho_n)$ with $\rho_n \in [0, 1]$; ρ_n contains information relative to the repair actions and is called the degree of repair ($\rho_n = 1$...minimal repair, $\rho_n = 0$...renewal, perfect repair).

We introduce the so-called virtual age of the system ($V(0) = 0$) (cf. Kijima 1989, Stadjje & Zuckerman 1991)

$$V(t) = \begin{cases} t - \tau_{n-1} + V(\tau_{n-1}), & \tau_{n-1} < t < \tau_n, \\ \rho_n V(\tau_n - 0), & t = \tau_n. \end{cases}$$

Then, let us modify assumption **(A3)**:

$$\lambda_{i0}(t) = q_i(t) \exp(\eta_i) Y_0(V(t), \beta_0) \quad (\beta_0 > 0).$$

We remark that $V(t) = t$ means nonhomogeneous Poisson process and minimal repair. Now, it is easy to see that the corresponding likelihood function is similar to (1) and the m.l. estimators are obtained by numerical methods.

The distribution of T_n can be derived with an explicit formula (but this is not possible for τ_n) ($A = e^{\alpha_0} \sum_{i=1}^k e^{\alpha_1 X_i} q_i$):

$$P(T_n > t | \tau_{n-1} = s) = \exp \left\{ - \left[A \beta_0 \int_0^t Y(u + V(s), \beta_0) du + e^\gamma ((t + s)^{\beta_1} - s^{\beta_1}) \right] \right\}.$$

A specialization of the model arises in the case of Koziol-Green modeling for censoring. We assume that

$$\lambda_{i1}(t, \theta) = \omega \lambda_{i0}(t, \theta)$$

where ω is positive parameter (degree of censorship), $\gamma = \eta_i$ and $\beta_0 = \beta_1$. The consideration could be continued with studies of parameter estimation and model properties.

Finally, we turn to wearout failures. Consider the extended marks $\xi_n = (\sigma_n, \delta_n, \rho_n, \zeta_n)$ with $\zeta_n \in \mathbf{R}^+$. We suppose that ζ_n (damage or cost values) are i.i.d., independent of τ_n and have the distribution function $F_\zeta(x; \kappa)$. For

$$\begin{aligned} \chi(t) &:= \max_n(\zeta_n : \tau_n \leq t) \\ \sigma_x &:= \inf(t : \chi(t) > x) \end{aligned} \quad (2)$$

we have

$$P(\sigma_x > t) = P(T_1 > t) + \sum_{n=1}^{\infty} [F_\zeta(x)]^n \int_0^t P(T_{n+1} > t - u | \tau_n = u) f_{\tau_n}(u) du$$

and in the case of nonhomogeneous Poisson process (cf. Konecny & Nachtnebel 1994)

$$P(\sigma_x > t) = \exp(-\Lambda(t, \theta)[1 - F_\zeta(x, \kappa)]).$$

Let t_0 be the design operation time of the system and σ_x is defined by (2).

Then we introduce the so-called wearout limit: $x_{t_0, \varepsilon} = \inf\{x : P(\sigma_x > t_0) \geq 1 - \varepsilon\}$.

In the example "Weibull process, ζ_n exponentially distributed" we have

$$x_{t_0, \varepsilon} = \frac{1}{\kappa} \log \left[\frac{A t_0^{\beta_0} + e^\gamma t_0^{\beta_1}}{-\log(1 - \varepsilon)} \right],$$

and $x_{t_0, \varepsilon}$ can be estimated by use of $\hat{\kappa}(t) = \frac{N(t)}{\sum_{i=1}^{N(t)} \zeta_i}$, $\hat{\alpha}_0(t)$, $\hat{\gamma}(t)$, $\hat{\beta}_0(t)$, $\hat{\beta}_1(t)$, $\hat{\alpha}_1(t)$

and $A = e^{\alpha_0} \sum_{i=1}^k e^{\alpha_1 X_i} q_i$.

References

- Franz, J. (1994). On estimation problems in random censored repair models. *Economic Quality Control* 9(3), 125-142.
- Franz, J. (1999). On Repair Models and Estimators of Wearout Limits *Economic Quality Control* 14, No. 3/4, 135 - 151.
- Franz, J. and Magiera, R. (1998). Sequential estimation for a family of counting processes in the nuisance parameter case. *Statistical Papers* 39, 147 - 162.
- Kijima, M. (1989). Some results for repairable systems with general repair. *J. Appl. Prob.* 26, 89-102.
- Konecny, F. and Nachtnebel, H.P.(1994). Risk estimation in partial duration series of seasonal floods. In: *Hipel, K.W.: Stochastic and Statistical Methods in Hydrology and Environmental Engineering I*, 73 - 83. Kluwer Academic Publ., Netherlands.
- Last, G. and Brandt, A. (1995). *Marked Point Processes on the Real Line*. Springer, New York.
- Luhm, A. and Pruscha, H. (1997). Semi-parametric inference for regression models based on marked point processes. *Discussion Paper* 78, Sonderforschungsbereich 386, Universität München (Preprint).
- Stadje, W. and Zuckerman, D. (1991). Optimal maintenance strategies for repairable systems with general degrees of repair. *J. Appl. Prob.* 28, 384-396.

Jürgen Franz
Dresden University of Technology
Department of Mathematics
D-01062 Dresden
Germany

Tina Herberts

Universität Ulm

Optimal Stopping and Parameter Estimation in the Detection Problem

We consider a technical system whose failure rate jumps at an unobservable random time σ from a constant μ_0 to another constant μ_1 , where $\mu_0 < \mu_1$ and σ is supposed to be exponentially distributed with parameter λ . When the system fails, a minimal repair is carried out immediately. The problem is to detect the unobservable change point σ as well as possible by means of the failure times $T_n, n \in \mathbb{N}$, of the system. Here we assume that these failure times are observed up to a fixed time t^* . At t^* it is investigated if a change has already taken place and when. If we conclude that no change has occurred so far, then the system failure times are observed sequentially from t^* on and the task is to stop processing the system as soon as a change takes place. The information one gathers is therefore described by the filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_s), s \in \mathbb{R}_+$, given by

$$\mathcal{G}_s = \sigma(N_v, 0 \leq v \leq \max\{s, t^*\}),$$

where N_s describes the number of failures up to s :

$$N_s = \sum_{j=1}^{\infty} I_{\{T_j \leq s\}}.$$

Detecting the change point σ “as well as possible” means that a \mathbb{G} -stopping time ζ has to be determined such that ζ maximizes EZ_τ in the set of all finite \mathbb{G} -stopping times τ , where the gain process $(Z_s), s \in \mathbb{R}_+$, is given by

$$Z_s = -I_{\{\sigma > s\}} - c(s - \sigma)^+$$

for some constant $c > 0$.

In this model, we determine the optimal stopping time ζ by means of a smooth semimartingale representation of $(\hat{Z}_s) = (E(Z_s | \mathcal{G}_s))$. Then we consider the case that the model parameters λ, μ_0 and μ_1 are unknown. We determine the likelihood function of the process $N = (N_s)$ and show that the maximum likelihood estimator $\theta^n = (\lambda^n, \mu_0^n, \mu_1^n)$ which is based on n independent copies of N is strongly consistent for $\theta = (\lambda, \mu_0, \mu_1)$ with rate

of convergence $o(\ln n/n)$. Substituting θ^n into the formula for the optimal stopping time ζ yields an estimator ζ^n of ζ . We show that ζ^n converges to ζ almost surely as $n \rightarrow \infty$, where the rate of convergence again equals $o(\ln n/n)$.

Tina Herberts
Department of Stochastics
University of Ulm
89069 Ulm
Germany
herberts@mathematik.uni-ulm.de

Waltraud Kahle (Universität Magdeburg)

C. E. Love (Simon Fraser University, Burnaby, B.C. Canada)

Vergleich verschiedener Modelle für Ausfall-Reparatur-Prozesse

Abstract. In den letzten Jahren erschienen eine Reihe von Arbeiten zur Modellierung von Ausfall-Reparatur-Prozessen. Der wesentliche Unterschied zu früheren Arbeiten liegt dabei in der Berücksichtigung sogenannter unvollständiger Reparaturen, die einen Reparaturgrad zwischen den beiden Extremfällen „vollständige Erneuerung“ und „Minimalinstandsetzung“ besitzen.

Im Vortrag wird der Versuch unternommen, die verschiedenen Modelle an Daten einer Turbine eines Wasserkraftwerkes anzupassen. Dazu werden verschiedene Annahmen über die Art der Lebensdauer-Verteilung getroffen, Parameter der Verteilungen geschätzt und die Güte der Anpassung untersucht. Besonderes Augenmerk liegt auf der Schätzung des Reparaturgrades bei verschiedenen Instandhaltungsmaßnahmen.

1. Modellierung des Systems

Ein System (im konkreten Fall eine Turbine eines Wasserkraftwerkes) wird zum Zeitpunkt t_k einer Reparatur unterzogen. Die Reparatur erfolgt entweder nach einem Ausfall (in diesem Fall sind Minimalinstandsetzung, kleine Instandhaltungen oder große Instandhaltungen möglich) oder aufgrund einer vorbeugenden Instandhaltungsmaßnahme (in diesem Fall sind nur kleine Instandhaltungen oder große Instandhaltungen sinnvoll). Wir nehmen an, daß eine Reparatur das sogenannte „virtuelle Alter“ (siehe KIJIMA [1]) des Systems beeinflußt, d.h. das Alter des Systems wird durch die Reparatur zurückgesetzt. Seien v_k das virtuelle Alter des Systems zur Zeit t_k (nach der Reparatur) und $\xi_{1k}\xi_{2k}$ der Reparaturgrad. ξ_{1k} kann die Werte 1 oder ξ_1 annehmen und ξ_{2k} ist 1 oder ξ_2 . Dabei sind ξ_1 der Reparaturgrad einer kleinen Instandhaltung, ($0 \leq \xi_1 \leq 1$) und ξ_2 der Reparaturgrad einer großen Instandhaltung ($0 \leq \xi_2 \leq 1$). Wir nehmen also an, daß bei einer großen Instandhaltung ein zusätzlicher Effekt auftritt. Kijima betrachtete zwei Typen von virtuellen Alterungsprozessen. In Prozessen vom Typ I ist das virtuelle Alter nach einer Reparatur $v_{k-1} + \xi_{1k}\xi_{2k}(t_k - t_{k-1})$, in Prozessen vom Typ II dagegen $\xi_{1k}\xi_{2k}(v_{k-1} + (t_k - t_{k-1}))$.

Die Ausfallrate des Systems zur Zeit t hängt vom virtuellen Alter ab und ist $\lambda_{k+1}(t) = \lambda(t - t_k + v_k)$ für $t_k \leq t < t_{k+1}$. Die dem Ausfallverhalten zugrundeliegende Intensität sei Weibull $\lambda(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}$.

Von Interesse sind nun Schätzungen der unbekannt Parameter α , β , ξ_1 and ξ_2 . Wir möchten hier auf die Herleitung der Likelihoodfunktion, die sich als Spezialfall einer Likelihoodfunktion für Punktprozesse ergibt, verzichten und nur die Ergebnisse vorstellen. Die Schätzungen erfolgten mittels des Programmpaketes GAUSS ([4]).

2. Analyse von Ausfalldaten einer Turbine

Der Datensatz enthält Ausfall- und Reparaturdaten einer Turbine im British Columbia Hydro-Electric Power Generation System in der Zeit von Januar 1977 bis Dezember 1999. Es wurden 496 Laufzeiten registriert, wovon 160 mit einem Ausfall der Turbine endeten. Weiterhin wurden 50 große Instandhaltungen und 96 kleine Instandhaltungen registriert. Nur in einem Fall erfolgte eine kleine Instandhaltung nach einem Ausfall, alle 50 großen Instandhaltungen und 95 kleine Instandhaltungen wurden vorbeugend durchgeführt. Der Datensatz enthält zusätzlich die Zeitdauern, die die Reparaturen jeweils in Anspruch genommen haben. Diese Zeitdauern reichen von 1 Minute bis zu 66 624 Minuten (das sind ca. 46 Tage).

Es wurden folgende Modelle untersucht:

- (a) Alle Instandhaltungen (große und kleine) setzen das virtuelle Alter des Systems entsprechend Kijima Type I zurück.
- (b) Alle Instandhaltungen, die weniger als 50 000 Minuten dauerten, setzen das virtuelle Alter des Systems entsprechend Kijima Type I zurück. Längere Instandhaltungen werden als Erneuerungen aufgefaßt.
- (c) Alle Instandhaltungen, die weniger als 20 000 Minuten dauerten, setzen das virtuelle Alter des Systems entsprechend Kijima Type I zurück. Längere Instandhaltungen werden als Erneuerungen aufgefaßt.
- (d) Alle Instandhaltungen werden als Erneuerungen aufgefaßt.
- (e) Alle Instandhaltungen (große und kleine) setzen das virtuelle Alter des Systems entsprechend Kijima Type II zurück.
- (f) Alle Instandhaltungen, die weniger als 50 000 Minuten dauerten, setzen das virtuelle Alter des Systems entsprechend Kijima Type II zurück. Längere Instandhaltungen werden als Erneuerungen aufgefaßt.
- (g) Alle Instandhaltungen, die weniger als 20 000 Minuten dauerten, setzen das virtuelle Alter des Systems entsprechend Kijima Type I zurück. Längere Instandhaltungen werden als Erneuerungen aufgefaßt.

| Modell | α | β | ξ_1 | ξ_2 |
|--------|------------|----------|---------|---------|
| (a) | 121592.68 | 1.1365 | 0.17 | 0.000 |
| (b) | 69,544.28 | 0.99976 | 0.4991 | 0.4828 |
| (c) | 68,057.52 | 0.9982 | 0.4621 | 0.475 |
| (d) | 69,036.60 | 0.99685 | * | * |
| (e) | 105,800.22 | 1.2561 | 0.7873 | 0.5817 |
| (f) | 97,204.20 | 1.2139 | 0.7351 | 0.5321 |
| (g) | 68,977.81 | 0.998161 | 1.0 | 1.0 |

Tabelle 1: Parameterschätzungen bei verschiedenen Modellannahmen

Die Parameterschätzungen für alle diese Modelle sind in Tabelle 1 dargestellt.

Einige der Ergebnisse in Tabelle 1 bedürfen sicherlich der Interpretation:

1. Modell (a): Die Voraussetzung, daß beide Arten von Instandhaltungen das virtuelle Alter gemäß dem Modell Kijima Type I zurücksetzen (d. h. nur die seit der letzten Instandhaltung abgelaufene Zeit wird verkürzt), führt zu einer Schätzung der Reparaturgrade 0 bei großen Instandhaltungen und 0.17 bei kleinen Instandhaltungen. Damit bewirkt eine große Instandhaltung, daß das System nach der Reparatur wieder so alt ist, wie zu Beginn der letzten Arbeitsphase.
2. Modell (e): Wird für beide Arten von Instandhaltungen das Modell Kijima Type II verwendet (d. h. eine Instandhaltung bewirkt eine Verkürzung des gesamten bisher erreichten virtuellen Alters), so ist der Grad der Reparatur 0.7873 bei kleinen Instandhaltungen und zusätzlich noch einmal 0.5817 bei großen Instandhaltungen. Das virtuelle Alter des Systems nach einer Instandhaltung ist jedoch in beiden Fällen ungefähr gleich.
3. Modell (g): Wenn vorausgesetzt wird, daß alle Instandhaltungen, die länger als 20 000 Minuten dauerten, eine Erneuerung des Systems bewirken und die anderen nach Modell Kijima Type II erfolgen, so wird der Reparaturgrad der letzteren Instandhaltungen immer als 1 geschätzt. Damit bewirken diese Instandhaltungen nichts mehr. Das spricht dafür, daß die Annahme einer Erneuerung viel zu restriktiv für reale Systeme ist.
4. Modelle (b), (c), (d) und (g): Eine Schätzung des Formparameters der Weibullintensität β von annähernd 1 bedeutet, daß jede Instandhaltung unterbleiben kann, da die Ausfallrate des Systems nicht mehr vom Alter des Systems abhängt. Damit ist das Modell zur Beschreibung des realen Verhaltens ungeeignet. Dieser Effekt tritt wiederum immer dann auf, wenn zu viele Instandhaltungen als Erneuerungen angesehen werden.

Um zu untersuchen, welches Modell die gegebenen Daten am besten beschreibt, wurden für jedes Modell mit den geschätzten Parametern standardisierte Residuen $e_k =$

$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda(v(t))dt$ berechnet (siehe LAWLESS[5], pp. 279-82). Ist das Modell gut, so sind diese Residuen (zensierte oder unzensierte) Realisierungen einer exponentialverteilten Zufallsgröße. Somit kann ein Kaplan-Meier-Schätzer der Verteilung der Residuen berechnet werden und seine Abweichung von der Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung als Gütemaß verwendet werden. Dabei stellte sich heraus, daß das Modell (a) die Daten am besten beschreibt.

Literatur

- [1] M. Kijima, "Some results for repairable systems with general repair", *Journal of Applied Probability*, vol 26, 1989, pp 89-102.
- [2] R. Guo, C.E. Love, "Simulating non-homogeneous Poisson processes with proportional intensities", *Naval Research Logistics Quarterly*, vol 41, 1994, pp 507-522.
- [3] S. Gasmi, W. Kahle, "Parameter estimation in renewal processes with imperfect repair", *Advances in Stochastic Models for Reliability, Quality and Safety, Birkhäuser Book Series, Statistics for Industry and Technology*, 1998, pp 53-65.
- [4] GAUSS, Mathematical & Statistical System (1996), Aptec Systems Inc., Maple Valley, WA, 98038, USA.
- [5] J.F. Lawless, "Statistical Models and Methods for Lifetime Data", *J. Wiley, New York, 1982*.

Waltraud Kahle
Institut für Mathematische Stochastik
Otto-von-Guericke-Universität
Magdeburg

C.E. Love
Faculty of Business Administration
Simon Fraser University
Burnaby, B.C. Canada.

Axel Lehmann

Universität Magdeburg

A Wiener Process Based Model for Failure and Degradation Data in Dynamic Environments

Keywords. Degradation process, drift reliability, threshold level, covariates, maximum likelihood estimation, Wiener process, inverse Gaussian distribution

1. Introduction

In most practical applications items or systems operate in heterogeneous environments in which loads, environmental stresses, and other factors may vary substantially over time. So, their reliability depends on dynamically changing environmental factors, which induce different internal stresses in an item that may change its failure rate. Referring to these explanatory factors as covariates, Kalbfleisch and Prentice (1980) distinguish between external and internal covariates, which may be time-varying. External covariates characterize the operating environment of an item in a way that they may influence, but are not influenced by, the failure experience of a trial. Examples are, for instance, experimental factors like temperature, pressure or voltage, different loads and stress levels, age, and usage measures. Internal covariates characterize the deterioration of an item. They are time measurements taken on the item and can be observed only as long as the item survives and is uncensored. Such covariates are, for instance, wear, crack-growth, corrosion, material fatigue, a general performance measure, or, in medical settings, a biomarker process. In most settings, items degrade physically over time and a measurable physical deterioration almost always precedes failure. Degradation data, such as oxidation, wear out, and fatigue-crack-growth in engineering applications, represent the level of deterioration of an item and degradation measures provide additional information to failure time observations. Frequently the item is regarded as failed and then switched off when its degradation first reaches a critical threshold level.

In this paper, degradation is modelled by a univariate Wiener process with drift and a time scale transformation to model the influence on failure of a dynamic operating environment of the item and to cover non-linear degradation behavior. The random time scale is a function of an external covariate process and describes slowing or accelerated degradation

in real time. Conditionally on the covariates, the resulting degradation-caused failure time follows an inverse Gaussian distribution with a time scale transformation. For suitably chosen time scales it possesses a bathtub-shaped failure rate.

Wiener degradation processes with a non random time scale transformation have found application in Whitmore and Schenkelberg (1997) but not related to a threshold level and additional failure time data. Bagdonavičius and Nikulin (2000) use the gamma-process with a random time scale depending on covariates to model degradation. Assuming a Wiener process as degradation model implies that the item state is not monotonically increasing although its mean value function does have this property if the drift is positive. However, there are many applications where degradation need not be increasing, for instance, crack growth due to fatigue. An excellent overview on probabilistic modelling was given by Singpurwalla (1995).

2. External Covariates

The characterization of an external covariate Z as influencing, but not being influenced by, the failure experience, means that its history is determined independently of the failure time. To be more precisely, let $Z = \{Z_u : u \in \mathbb{R}_+\}$ be a covariate process on an underlying probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and define the σ -algebras $\mathcal{F}_u^Z = \sigma(Z_s : 0 \leq s \leq u)$ and $\mathcal{F}_{\geq u}^Z = \sigma(Z_s : s \geq u)$ which refer to the past and the future of Z at time u , respectively. Let U be the failure time of an item and $N_u = \mathbf{1}\{U \leq u\}$ its counting process with the past $\mathcal{F}_u^N = \sigma(N_s : 0 \leq s \leq u)$.

Definition 1 Z is called an external covariate (with respect to U), if \mathcal{F}_u^N and $\mathcal{F}_{\geq u}^Z$ are for all $u \geq 0$ conditionally independent given \mathcal{F}_u^Z , i.e.

$$\mathbb{P}(A \cap B | \mathcal{F}_u^Z) = \mathbb{P}(A | \mathcal{F}_u^Z) \mathbb{P}(B | \mathcal{F}_u^Z)$$

for all $A \in \mathcal{F}_u^N, B \in \mathcal{F}_{\geq u}^Z$.

Hence, we have for the conditional distribution function of U

$$F_U(u|Z) := \mathbb{P}(U \leq u | Z_u^u) = \mathbb{P}(U \leq u | Z),$$

where $Z_u^u = \{Z_s : 0 \leq s \leq u\}$. That means, at each time u , it is the same whether we know at u only the past of Z or the whole path of the covariate process which can thus be always assumed to be known in advance. Hence, for an external covariate Z , the process $\{F_U(u|Z)\}$ is nondecreasing whereas it is only a submartingale in general. Trivial examples of external covariates are processes $Z_u = f(u, Z_0)$ with f being non random and Z_0 independent of u and stochastic processes Z such that U is an \mathcal{F}_u^Z -stopping time.

3. Threshold Model

Let Z denote a possibly multidimensional external covariate process describing the dynamic environment and Y a one dimensional internal covariate process describing a key degradation measure. Here, the degradation process $Y_u = Y_0 + \mu u + \sigma W_u$ is modelled by a Wiener process with drift and a random initial state Y_0 independent of W . Further, let $t_Z(u) = t(u, Z_0^u)$ denote a time scale, that is a function of real time and of load, usage, and other environmental factors describing slowing or accelerating degradation in real time and driving the speed of the deterioration. The transformed time t measures the physical progress of degradation and is referred to as operational time. The choice of a time scale, which is a positive, nondecreasing, and right continuous function of u , may vary according to the setting. Possible examples are

$$t_Z(u) = m \left(\int_0^u \exp(\beta^T Z_s) ds; \gamma \right),$$

$$m(t) = \gamma_1 t + \gamma_2 (1 - e^{-\gamma_3 t}), \quad m(t) = t^\gamma$$

where the choice of the function m depends on, whether degradation can be in principle unbounded or approaches a saturation point.

Given a threshold level $h \in \mathbb{R}$, the failure time is defined as the first passage time $U = \inf\{u \geq 0 : Y_Z(u) := Y(t_Z(u)) \geq h\}$ of the time transformed degradation process with respect to h . It is easily seen, that Z is external with respect to U if and only if the processes Z and Y are independent, which is assumed for all what follows. It means that degradation depends on the external covariates only through the time scale.

Now we will compute the stochastic failure rate of U . Let $\tau = \inf\{t \geq 0 : Y_t \geq h\}$ denote the first passage time of the non-transformed degradation process. On $\{Y_0 = y_0 < h\}$ it follows an inverse Gaussian distribution $\tau \sim \text{IG} \left(\frac{\Delta h}{\mu}, \frac{\Delta h^2}{\sigma^2} \right)$ ($\Delta h = h - y_0$) with the baseline failure rate

$$r_0(t, \Delta h) = \frac{\frac{\Delta h}{\sigma \sqrt{t^3}} \phi \left(\frac{\Delta h - \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \mathbf{1}\{t > 0\}}{\Phi \left[\frac{\Delta h - \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right] - e^{(2\mu\sigma^{-2}\Delta h)} \Phi \left[\frac{-\Delta h - \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right]}$$

and the baseline survival function

$$S_0(t, \Delta h) = P(\tau > t) = \exp \left(- \int_0^t r_0(s, \Delta h) ds \right).$$

Then, conditionally on Y_0 and Z

$$\begin{aligned} S_U(u|Y_0, Z) &= P(U > u | Y_0, Z_0^u) \\ &= P \left(\sup_{0 \leq v \leq u} Y(t_Z(v)) < h | Y_0, Z_0^u \right) \\ &= P \left(\sup_{0 \leq s \leq t_Z(u)} Y_s < h | Y_0, Z_0^u \right) \\ &= S_0(t_Z(u), h - Y_0) = \exp \left(- \int_0^u \lambda_U(s|Y_0, Z) ds \right) \end{aligned} \quad (1)$$

with $\lambda_U(u|Y_0, Z) = t'_Z(u) r_0(t_Z(u), h - Y_0)$. Hence, the stochastic failure rate conditionally only on Z is $\lambda_U(u|Z) = t'_Z(u) E_{Y_0}[r_0(t_Z(u), h - Y_0)]$. Equation (1) says that the conditional survival function of U is a strictly decreasing survivor function of the time scale, which is just the definition of an *ideal* time scale given by Duchesne and Lawless (2000). The shape of these stochastic failure rates conditional on different information levels depends heavily on the derivative of the time scale and is, for instance, bathtub-shaped for suitably chosen time scales.

4. Statistical Inference

Suppose that n independent items are put on test at real times u_{i0} . For each item we assume that the external covariate process Z_i is observed continuously in the interval $[u_{i0}, u_{im_i}]$ and that the degradation levels $Y_{ij} = Y_i(t_Z(u_{ij}))$ are observed at $m_i + 1$ inspection times $u_{i0} < u_{i1} < u_{i2} < \dots < u_{im_i} < \infty$, including the initial degradation level, but only until a failure of the item has occurred. The failure times U_i are assumed to be observable at any time $u \in (u_{i0}, u_{im_i}]$.

Denoting the observation times in operational time by $t_{ij} = t_Z(u_{ij})$ we observe in each operational time interval $(t_{ij-1}, t_{ij}]$ either a realization of the lifetime $T_i = t_Z(U_i)$ or the degradation level Y_{ij} at t_{ij} under the condition that the process Y_i has not yet reached the threshold h until t_{ij} . The likelihood function of such a model was determined in Kahle and Lehmann (1998). Conditioned on the covariate paths, it is given by

$$L(\mathcal{X}; \theta) = \prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^{M_i} \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{\Delta t_{ij}}} \phi \left(\frac{\Delta Y_{ij} - \mu \Delta t_{ij}}{\sigma \sqrt{\Delta t_{ij}}} \right) \times \left[1 - \exp \left(-\frac{2(h - Y_{ij-1})(h - Y_{ij})}{\sigma^2 \Delta t_{ij}} \right) \right] \right) \times \left(t'_{Z_i}(U_i) \frac{h - Y_{iM_i}}{\sigma \sqrt{(T_i - t_{iM_i})^3}} \phi \left(\frac{h - Y_{iM_i} - \mu(T_i - t_{iM_i})}{\sigma \sqrt{T_i - t_{iM_i}}} \right) \right)^{\mathbf{1}\{T_i < t_{im_i}\}} \right\} \quad (1)$$

with ϕ denoting the standard normal density and \mathcal{X} the observed data, $\theta = (\mu, \sigma^2, \beta, \gamma)$, $M_i = \max\{k : t_{ik} < T_i\}$, and $\Delta Y_{ij} = Y_{ij} - Y_{ij-1}$, ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m_i$).

We use maximum likelihood estimation to find estimates of the parameters μ , σ^2 , β , and γ . In general, the log-likelihood equations have to be solved numerically. Only for the drift parameter μ we obtain explicitly the estimate

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{iM_i} - Y_{i0} + \mathbf{1}\{T_i < t_{im_i}\} (h - Y_{iM_i}))}{\sum_{i=1}^n (t_{iM_i} - t_{i0} + \mathbf{1}\{T_i < t_{im_i}\} (T_i - t_{iM_i}))}$$

which depends, however, on the time scale parameters. It can be easily interpreted as the total observed degradation divided by the total time on test. For the variance parameter σ^2 we find the implicit estimate

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M^*} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^{M_i} \frac{(\Delta Y_{ij} - \hat{\mu} \Delta t_{ij})^2}{\Delta t_{ij}} + 2\hat{\sigma}^2 Q_{ij}(1 - \coth Q_{ij}) \right. \\ \left. + \mathbf{1}\{T_i < t_{im_i}\} \frac{(h - Y_{iM_i} - \hat{\mu}(T_i - t_{iM_i}))^2}{T_i - t_{iM_i}} \right\} \end{aligned}$$

with $Q_{ij} = (h - Y_{ij-1})(h - Y_{ij})/\hat{\sigma}^2 \Delta t_{ij} > 0$ and $M^* = \sum_{i=1}^n (M_i + \mathbf{1}\{T_i < t_{im_i}\})$. Using the simple approximation

$$Q_{ij}(1 - \coth Q_{ij}) \approx \begin{cases} Q_{ij} - 1, & Q_{ij} < 1 \\ 0, & Q_{ij} \geq 1 \end{cases}$$

we obtain an approximate explicit estimate for σ^2 .

ML estimates of the time scale parameters has to be found numerically by maximization of the likelihood function $L(\mathcal{X}; \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \beta, \gamma)$ or by the simplified least square approach $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{M_i} (\Delta Y_{ij} - \hat{\mu} \Delta t_{ij})^2 \xrightarrow{\beta, \gamma} \min$. If the time scale is not given in parametrized form, a semiparametric approach can be used, based on a piecewise-linear approximation of $Y_{Z_i}(u)$ and conditional means $E[Y_{Z_i}(u) | (Z_i)_0^u, U_i > u]$.

If the threshold level h is unknown, it can be regarded as an additional parameter that has to be estimated. An inspection of the likelihood function (1) shows that the ML estimate \hat{h} will not exist, if in all realizations failures could not be observed, since in this case we have $\arg \sup_{h>0} L(\mathcal{X}; \theta) = +\infty$ and the maximum of the likelihood function with respect to h will be attained at infinity at the edge of the parameter region. Maximum likelihood estimation of the parameters μ , σ^2 , and h for a Wiener degradation model without time scale transformation is illustrated in Lehmann (1999) using simulated data sets. This simulation study shows that the mean squared errors of the ML estimates of μ , σ^2 , and h based on the likelihood function (1) are smaller than those of ML estimates purely based on failure time data or on degradation data.

The above threshold model can be extended to repairable items in the following way. Upon each failure and possibly at the regular inspection times of degradation measurements the item is repaired in negligible time. At an inspection time degradation is measured and, if necessary, the item is preventively repaired. Each repair action sets back the degradation level to a value between its previous level and the level of a new item. The latter case is equivalent to a perfect repair, the first case to a minimal repair and any level in between corresponds to an imperfect repair.

References

- BAGDONAVIČIUS, V. & NIKULIN, M. S. (2000). Estimation in degradation models with explanatory variables. *Lifetime Data Analysis* **7**, 85-103.
- DUCHESNE, T. & LAWLESS, J. (2000). Alternative time scales and failure time models. *Lifetime Data Analysis* **6**, 157-179.
- KAHLE, W. & LEHMANN, A. (1998). Parameter estimation in damage processes: dependent observation of damage increments and first passage time. In: Kahle, W., Collani, E., Franz, J. and Jensen, U. (eds.): *Advances in Stochastic Models for Reliability, Quality and Safety*. Birkhauser, Boston, pp. 139-152.
- KALBFLEISCH, J. D. & PRENTICE, R. S. (1980) *The statistical analysis of failure time data*. John Wiley, New York.
- LEHMANN, A. (1999). Lifetime parameter estimation based on observations of damage process increments and first passage times. *Scientific Reports of the University of Applied Sciences Mittweida* **5**. Mittweida, pp. 29-32.
- SINGPURWALLA, N. D. (1995). Survival in dynamic environments. *Statistical Science* **10**, 86-103.
- WHITMORE, G. A. & SCHENKELBERG, F. (1997). Modelling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a time scale transformation. *Lifetime Data Analysis* **3**, 27-45.

Axel Lehmann
Otto-von-Guericke-University Magdeburg
Department of Mathematics, BOX 4120
D-39016 Magdeburg
Germany
axel.lehmann@mathematik.uni-magdeburg.de

Andreas Narr

Universität Ulm

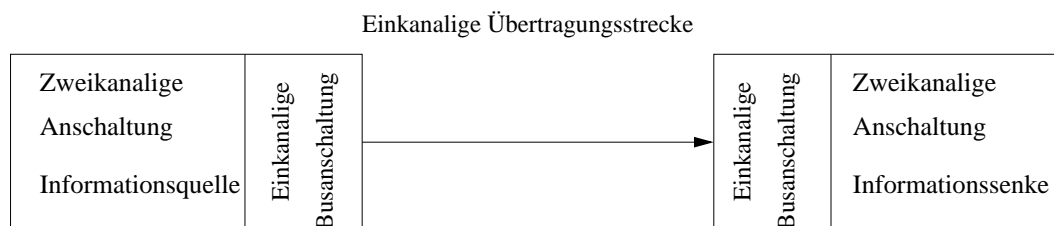
**Stochastische Modellierung in der Zuverlässigkeitstheorie -
ein Anwendungsbeispiel aus dem Bereich
der Sicherheitselektronik**

Stochastische Modellierung in der Zuverlässigkeitstheorie - ein Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Sicherheitselektronik

Andreas Narr
Abteilung Stochastik
Universität Ulm
narr@mathematik.uni-ulm.de

Die sicherheitstechnische Analyse (Fehleranalyse) neuer Produktentwicklungen aus dem Bereich der Sicherheitselektronik hat sich in den letzten Jahren stark verändert. Aufgrund der immer weiter zunehmenden Komplexität elektronischer Schaltungen und Baugruppen werden durch die etablierten Methoden zur Fehleranalyse, die allesamt deterministischer Natur sind, nicht alle Aspekte der Systemsicherheit erfaßt. So hat es sich durchgesetzt, daß zusätzlich zur deterministischen Fehlerbetrachtung anhand definierter funktionaler Fehlermodelle zunehmend auch Methoden aus dem Bereich der Stochastik herangezogen werden, um zu einer Beurteilung der Systemsicherheit zu kommen. Inzwischen wurden in vielen internationalen Sicherheitsnormen, welche die Grundlage eines Zulassungsverfahrens beim TÜV oder anderer notifizierender Stellen sind, solche probabilistischen Betrachtungsweisen übernommen und zwingend vorgeschrieben. Hier soll speziell, unter Verwendung Markovscher Modelle, eine Sicherheitsanalyse für den Datentransport über ein sogenanntes Sicherheitsbussystem vorgestellt werden. Ein Bussystem dient ganz allgemein dem Austausch von Daten zwischen einzelnen Komponenten bei räumlich verteilten Systemen, wie sie etwa bei komplizierten, mehrstufigen Produktionsabläufen in der Industrie vorkommen. Aus einem gewöhnlichen Bussystem entsteht durch Zusatzmaßnahmen, die eine hohe Datenintegrität gewährleisten sollen, ein Sicherheitsbussystem, das hauptsächlich in Bereichen mit hoher Personengefährdung zum Einsatz kommt. Die Datenübertragung über ein Bussystem erfolgt typischerweise in Form von sogenannten Telegrammen. Hierunter versteht man die Zusammenfassung von Daten zu einer Einheit. Aus modelltheoretischer Sicht sind am Telegrammverkehr (Datenverkehr) über das hier betrachtete spezielle Sicherheitsbussystem SafetyBUS p der Firma Pilz GmbH & Co. im wesentlichen drei Komponenten beteiligt:

- zweikanalige Busanschlutung der Informationsquelle (Sender)
- einkanalige Übertragungsstrecke, bestehend aus den Schaltungsteilen des Businterface der Informationsquelle und der Informationssenke, sowie dem Buskabel als eigentlichem Übertragungsmedium
- zweikanalige Busanschlutung der Informationssenke (Empfänger)



Eine Busanschaltung ist das Interface zwischen der Übertragungsstrecke (dem Buskabel) und einem Busteilnehmer (z.B. einer CPU oder eines I/O-Moduls). Ihre Aufgabe besteht darin, zu verschickende Telegramme für den Transport über den Bus vorzubereiten bzw. eingehende Telegramme soweit aufzubereiten, daß sie vom Empfänger verwertet werden können. Der zweikanalige Aufbau der Busanschaltungen bedeutet, daß zwei funktional identische aber nicht baugleiche Kanäle zur Verfügung stehen. Dieser redundante Hardwareaufbau gehört zu den Maßnahmen, die eine hohe Sicherheit bei der Datenübertragung gewährleisten sollen. Jeder der beiden Kanäle in einer Busanschaltung kann unabhängig vom jeweils anderen ausfallen. Dabei unterscheidet man nicht-sicherheitsrelevante von gefährlichen Ausfällen, wobei letztere noch in prinzipiell entdeckbare und unentdeckbare Ausfälle unterteilt werden. Neben der Möglichkeit eines individuellen Ausfalls eines Kanals kann es auch zu einem gekoppelten Ausfall beider Kanäle kommen, einem sogenannten Common-Cause-Fehler. Jeder der beiden Kanäle in einer Busanschaltung befindet sich daher zu jedem Zeitpunkt in einem von vier möglichen Zuständen:

- ok: Kanal befindet sich in ordnungsgemäßem Zustand
- du: Kanal ist gefährlich und unentdeckbar ausgefallen
- dd: Kanal ist gefährlich aber entdeckbar ausgefallen
- s: Kanal befindet sich im sicheren Zustand

Diese Zustände entsprechen nicht direkt realen (physikalischen) Zuständen der Kanäle, da ja nicht die Feinstruktur auf Bauteilebene betrachtet wird. Sie sollten vielmehr als abstrakte Beschreibungsgrößen verstanden werden. Die Zustände der Busanschaltung bzw. des zugehörigen Markov-Modells ergeben sich aus den Zuständen der beiden Kanäle der Busanschaltung. Dabei treten alle Kombinationen auf, bis auf diejenige, bei der sich beide Kanäle im sicheren Zustand (s) befinden. Somit basiert das Markov-Modell für die Busanschaltung auf 15 Systemzuständen. Abbildung 1 zeigt den zugehörigen Übergangsgraphen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde auf die Beschriftung der Pfeile mit den entsprechenden Übergangsintensitäten verzichtet.

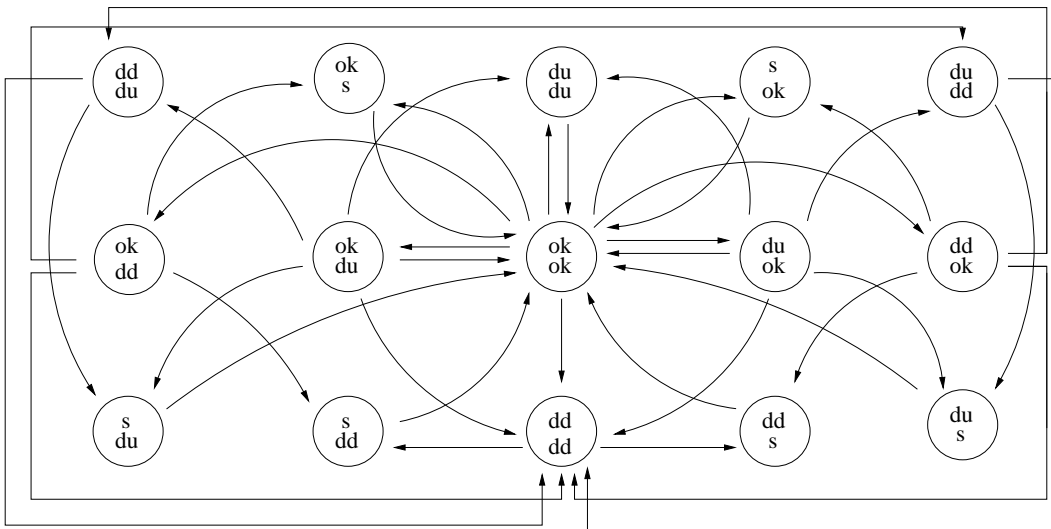


Abbildung 1: Markov-Modell der Busanschaltung

Die einzelnen Übergangsintensitäten werden aus einigen wenigen zur Verfügung stehenden „Rohdaten“ abgeleitet. Kritisch im Hinblick auf die Systemsicherheit sind diejenigen Zustände,

in denen beide Kanäle gefährlich ausgefallen sind, gleichgültig ob es sich dabei um entdeckbare oder aber prinzipiell unentdeckbare Ausfälle handelt. Dies sind die vier Zustände du/du, dd/dd, du/dd und dd/du. Daher wird - in Rücksprache mit dem TÜV - die stationäre Aufenthaltswahrscheinlichkeit in diesen Zuständen berechnet und als sogenannter PFD-Wert (probability of failure on demand) angesehen. Der PFD-Wert ist eines der Kriterien anhand derer die Einstufung eines Sicherheitsbussystems in eine von vier möglichen Sicherheitskategorien (SIL, safety integrity level) gemäß der Norm IEC 61508 erfolgt. Als PFD-Wert der im SafetyBUS p verwendeten CPU-Anschaltung erhält man $1.24 \cdot 10^{-5}$, was einer individuellen Einstufung in die höchste Sicherheitskategorie (SIL 4) entspricht. Auch die Anschaltung der DI8O8 (spezielles I/O-Modul) wird mit einem PFD-Wert von $1.79 \cdot 10^{-6}$ gemäß SIL 4 eingestuft.

Auf der Busübertragungsstrecke, also dem Buskabel, findet der eigentliche Telegrammverkehr statt. Im Gegensatz zu den Busanschlüssen handelt es sich bei der Übertragungsstrecke um ein einkanalisches Medium. Auch für diese Systemkomponente muß ein PFD-Wert (probability of failure) bestimmt werden. Dabei ist es üblich, die sogenannte maximale Restfehlerwahrscheinlichkeit eines über den Bus gesendeten Telegramms zu berechnen und als PFD-Wert der Übertragungsstrecke anzusehen. Unter der Restfehlerwahrscheinlichkeit versteht man allgemein die Wahrscheinlichkeit einer sicherheitsrelevanten Informationsverfälschung, d.h. einer derartigen Informationsverfälschung, die weder von den Sicherheitsmechanismen der Informationsquelle, noch von denen der Informationssenke erkannt wird. Die Telegrammübertragung wird durch zwei Maßnahmen abgesichert: zum einen führt jedes einzelne Telegramm eine CRC-Prüfsumme mit sich und zum anderen wird jedes verschickte Telegramm durch ein Antworttelegramm quittiert. Dieses enthält die gelesenen Bits in invertierter Reihenfolge und ermöglicht der Informationsquelle damit einen bitweisen Vergleich zwischen abgeschicktem Nutzdatentelegramm und empfangenem Antworttelegramm. Somit kann eine Telegrammverfälschung auf Seiten der Informationssenke nur in gewissen Fällen (nicht zu viele Bitverfälschungen) anhand der CRC-Prüfsumme erkannt werden. Die Informationsquelle hat prinzipiell zwei Möglichkeiten, Störungen bei der Telegrammübertragung aufzudecken. Zum einen wertet sie die CRC-Prüfsumme des Antworttelegramms aus und zum anderen vergleicht sie das gesendete Nutzdaten- mit dem empfangenen Antworttelegramm.

Zur Generierung der CRC-Prüfsumme wird ein Polynom verwendet, dem eine sogenannte Hamming-Distanz von vier entspricht. Das bedeutet, daß alle ein-, zwei und drei-bit-Verfälschungen in jedem Falle anhand der Prüfsumme erkannt werden. Fehlerhafte Telegramme, bei denen mehr als drei Bits verfälscht sind, werden nicht mehr in jedem Falle durch Auswertung der CRC-Prüfsumme erkannt. Um zu einem einfachen, in der Praxis leicht berechenbaren Modell zur Berechnung der Restfehlerwahrscheinlichkeit von Telegrammen zu kommen, wird die worst-case-Annahme gemacht, daß sämtliche Telegrammverfälschungen bei denen mehr als drei verschiedene Bits betroffen sind anhand der CRC-Prüfsumme generell nicht erkannt werden.

Ein gesendetes Telegramm gilt dann als fehlerfrei auf dem Bus übertragen, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Nutzdatentelegramm wird fehlerfrei von der Informationsquelle zur Informationssenke übertragen.
2. Die Übertragung des Antworttelegramms von der Informationssenke zur Informationsquelle verläuft fehlerfrei.
3. Das gesendete Nutzdatentelegramm stimmt bitweise mit dem empfangenen Antworttelegramm überein.

Dagegen wird das gesendete Telegramm von den Sicherheitsmechanismen des Telegrammverkehrs (in den Busanschaltungen) als fehlerfrei übertragen eingestuft, falls die folgenden drei Bedingungen gegeben sind:

1. Die Informationssenke sieht das Nutzdatentelegramm anhand der CRC-Prüfsumme als fehlerfrei übertragen an.
2. Die Informationsquelle kann mittels der CRC-Prüfsumme keine Telegrammverfälschung beim Antworttelegramm feststellen.
3. Das Nutzdatentelegramm und das Antworttelegramm stimmen bitweise überein.

Trotz der umfangreichen Sicherungsmaßnahmen können Fehler bei der Datenübertragung nicht gänzlich ausgeschlossen werden. Kritisch für die Datenintegrität ist eine unerkannte Störung des Telegrammverkehrs. Dazu muß folgendes Szenario eintreten:

Das Nutzdatentelegramm muß auf dem Weg von der Informationsquelle zur Informationssenke so verfälscht werden, daß wieder ein gültiges Telegramm entsteht, d.h. ein solches Telegramm, welches anhand seiner CRC-Prüfsumme nicht als fehlerbehaftet erkannt werden kann. Dazu müssen also mindestens 4 Bits auf der Übertragungstrecke verfälscht werden. Außerdem muß das Antworttelegramm auf dem Weg von der Informationssenke zur Informationsquelle so verfälscht werden, daß genau die selben Bits umkippen wie beim gesendeten Nutzdatentelegramm. Dadurch entsteht ein gültiges Telegramm, das bitweise mit dem gesendeten Nutzdatentelegramm übereinstimmt und folglich keine der beiden Sicherungsmechanismen auf Seiten der Informationsquelle (CRC-Prüfsumme des Antworttelegramms und bitweiser Abgleich zwischen Nutzdaten- und Antworttelegramm) eine Störung des Telegrammverkehrs diagnostizieren kann. Es wird angenommen, daß einzelne Bitverfälschungen unabhängig voneinander auftreten. Somit spielt die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Bitverfälschung (Bitfehlerwahrscheinlichkeit) eine zentrale Rolle bei der Berechnung der Restfehlerwahrscheinlichkeit, d.h. der Wahrscheinlichkeit einer unerkannten Störung des Telegrammverkehrs auf dem Bussystem. Da jedoch über die Bitfehlerwahrscheinlichkeit keine näheren Informationen vorliegen, wird die Restfehlerwahrscheinlichkeit eines Telegramms der Länge N Bit ($N \in \{32, 40, 48, 56, 64\}$) als Funktion $R_N(p)$ der unbekanntenen Bitfehlerwahrscheinlichkeit p betrachtet. Unter den gemachten Annahmen erhält man so

$$R_N(p) = \sum_{i=4}^N \binom{N}{i} (p^i (1-p)^{N-i})^2$$

Dabei genügt es Bitfehlerwahrscheinlichkeiten $p \in [0, \frac{1}{2}]$ in Betracht zu ziehen (bei $p = \frac{1}{2}$ liegt eine völlig willkürlichen Übertragung der einzelnen Bits auf dem Bus vor). Die maximale Restfehlerwahrscheinlichkeit und damit der PFD-Wert der Übertragungstrecke ergibt sich als

$$PFD_{\text{Übertragung}} = \max\left\{ \max_{0 \leq p \leq 0.5} R_N(p) \mid N \in \{32, 40, 48, 56, 64\} \right\} = 1.37 \cdot 10^{-6},$$

was wiederum den Anforderungen von SIL 4 genügt. Eine obere Schranke für den eigentlich interessierenden PFD-Wert des Gesamtsystems ergibt sich als Summe der PFD-Werte der beteiligten Komponenten (zwei Busanschlaltungen und die Übertragungsstrecke), wobei hierbei noch verschiedene Konfigurationen betrachtet werden können. Auch das Gesamtsystem konnte bei allen betrachteten Konfigurationen der höchsten Sicherheitskategorie (SIL 4) zugeteilt werden.

Literatur:

1. Rainer Fallner.
Probabilistische Auslegung sicherheitsgerichteter Busse.
TÜV Product Service GmbH, München, 1998.
2. Andreas Narr.
Über die Theorie Markoffscher Prozesse mit einem Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Sicherheitselektronik.
Diplomarbeit an der Universität Ulm, 2000.
3. IEC 61508
Functional Safety of Electrical/Electronic/Programmable Electronic Systems
1998.

Fritz Scholz

The Boeing Company, Mathematics and Computing Technology

Unified Confidence Bounds for Censored Weibull Data with Covariates

Data from a 2-parameter Weibull distribution (with covariates) are traditionally analyzed on a logarithmic scale to take advantage of the resulting location-scale nature of the transformed data Y_1, \dots, Y_n . Quantities of interest are then the regression parameters $\boldsymbol{\beta}$, the scale parameter σ , the p -quantile $y_p(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{u} + \sigma \log(-\log(1-p))$, and the tail probability $p(y|\mathbf{u}) = P(Y \leq y|\mathbf{u}) = 1 - \exp(-\exp((y - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{u})/\sigma))$ for a given p -dimensional covariate vector \mathbf{u} . Often such data is subjected to some sort of censoring which (aside from the case of type II censoring) does not allow exact confidence bounds for these quantities. Thus one resorts to large sample approximations from maximum likelihood theory. Unfortunately this has led to different types of approximations depending on the quantity of interest, see Meeker and Escobar (1998). For example, confidence bounds for $y_p(\mathbf{u})$ and $p(y|\mathbf{u})$ are not necessarily monotone in p or y as one would expect and thus they are not inverses to each other as would be the case when exact methods are possible. Also, one usually invokes approximate normality of the m.l.e.'s $\hat{y}_p(\mathbf{u})$ and $\log(\hat{\sigma})$ (the latter for producing better results) with the apparent inconsistency that $\hat{y}_p(\mathbf{0}) = \hat{\sigma} \log(-\log(1-p))$ invokes the inferior approximation. We resolve these problems by invoking either the approximate $(p+1)$ -variate normal approximation for $(V_1, V_2) = ((\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})/\hat{\sigma}, \log(\hat{\sigma}/\sigma))$ or its bootstrapped approximating distribution and proceeding by exact analytic steps from then on. Both approaches resolve all the above problems in a clean fashion and in the bootstrap case it leads back to the approach by Robinson (1983). In particular, the expected monotonicity in the confidence bounds for $y_p(\mathbf{u})$ and $P(Y \leq y|\mathbf{u})$ is preserved and they are inverses of each other.

Since the parameters $\boldsymbol{\beta}$ and σ are special cases of $y_p(\mathbf{u})$ for proper choice of \mathbf{u} and p we will only indicate the construction of lower confidence bounds for $y_p(\mathbf{u})$. For given $p \in (0, 1)$ and $w_p = \log(-\log(1-p))$ we obtain a lower bound for $y_p(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'\boldsymbol{\beta} + w_p\sigma$ of the following form $\hat{y}_{p,L}(\gamma, p, \mathbf{u}) = \mathbf{u}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\sigma}w_p - k\hat{\sigma}$ where $k = k(w_p)$ is determined such

that

$$\begin{aligned}
\gamma &\approx P\left(\mathbf{u}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} + (w_p - k)\widehat{\sigma} \leq \mathbf{u}'\boldsymbol{\beta} + w_p\sigma\right) = P\left(\frac{\mathbf{u}'(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})}{\widehat{\sigma}} + w_p(1 - \sigma/\widehat{\sigma}) \leq k\right) \\
&= P(V_1 + w_p[1 - \exp(-V_2)] \leq k) = P(V_1 \leq k - w_p + w_p \exp(-V_2)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{k - w_p + w_p \exp(-v_2) - v_2\sigma_{12}/\sigma_2^2}{\sigma_{1|2}}\right) \frac{1}{\sigma_2} \varphi(v_2/\sigma_2) dv_2,
\end{aligned}$$

and where Φ and φ denote the standard normal cumulative distribution function and density and σ_{12} is the covariance of the estimated approximating bivariate normal distribution of (V_1, V_2) , σ_2^2 is the corresponding variance of V_2 and $\sigma_{1|2}^2$ is the conditional variance of $V_1|V_2$. It is clear from the integral expression that the solution $k(w_p)$ is such that $h(w_p) = w_p - k(w_p)$ is strictly increasing in $w_p \in \mathcal{R}$ and thus in $p \in (0, 1)$. Hence the confidence bounds $\widehat{y}_{p,L}(\gamma, p, \mathbf{u}) = \mathbf{u}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} + h(w_p)\widehat{\sigma}$ have the desired monotonicity property. Since the invoked approximation only involves the approximation for (V_1, V_2) it will not be affected by the choice of p . Also, it makes use of the generally accepted better normal approximation for $\log(\widehat{\sigma})$ so that this benefit will be felt generally and not just in confidence bounds for σ .

The monotonicity allows the inversion of the quantile bounds to get bounds for the tail probability $p(y|\mathbf{u}) = P(Y \leq y|\mathbf{u})$. These can also be gotten directly (without inversion) by solving

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{w(y) \exp(-v_2) - h_y - v_2\sigma_{12}/\sigma_2^2}{\sigma_{1|2}}\right) \frac{1}{\sigma_2} \varphi(v_2/\sigma_2) dv_2$$

for $w(y)$ for a given value of $h_y = (y - \mathbf{u}'\widehat{\boldsymbol{\beta}})/\widehat{\sigma}$. We then take $G(w(y)) = 1 - \exp(-\exp(w(y)))$ as the desired upper bound for $p(y|\mathbf{u})$.

Some of the concerns raised here could also be addressed by relying on likelihood ratio based confidence intervals and its invariance properties, see Meeker and Escobar (1995). However, implementing these methods is computationally more complicated and it is not clear to us whether the monotonicity of bounds is a natural consequence of that approach. Although the above approach was presented in the context of transformed Weibull data, it would work equally well in other situations where the (transformed) data come from a location-scale distribution.

References

- Meeker, W.Q. and Escobar, L.A. (1995), "Teaching about approximate confidence regions based on maximum likelihood," *The American Statistician* **49**, 48-53.
- Meeker, W.Q. and Escobar, L.A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley & Sons, New York.

Robinson, J.A. (1983), "Bootstrap confidence intervals in location-scale models with progressive censo ring," *Technometrics* **25**, 179-187.

Fritz Scholz

The Boeing Company
Mathematics and Computing Technology
P.O. Box 3707, MS 7L-22
Seattle WA 98124-2207
e-mail: fritz.scholz@boeing.com

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| Dietmar Feger | |
| <i>A functional law of the iterated logarithm</i> | 3 |
| Jürgen Franz | |
| <i>Stress Modeling in Repairable Systems</i> | 9 |
| Jürgen Hentzschel | |
| <i>RAMS-Analysen mit zensierten Stichproben</i> | 15 |
| Tina Herberts | |
| <i>Optimal Stopping and Parameter Estimation in the Detection Problem</i> | 21 |
| Ludwig Hoy | |
| <i>Beitrag zur Qualitätssicherung in der Elektronikindustrie</i> | 23 |
| Waltraud Kahle, C. E. Love | |
| <i>Vergleich verschiedener Modelle für Ausfall-Reparatur-Prozesse</i> | 31 |
| Axel Lehmann | |
| <i>A Wiener Process Based Model for Failure and Degradation Data in Dynamic Environments</i> | 35 |
| Andreas Narr | |
| <i>Stochastische Modellierung in der Zuverlässigkeitstheorie - ein Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Sicherheitselektronik</i> | 41 |
| Fritz Scholz | |
| <i>Unified Confidence Bounds for Censored Weibull Data with Covariates</i> | 47 |